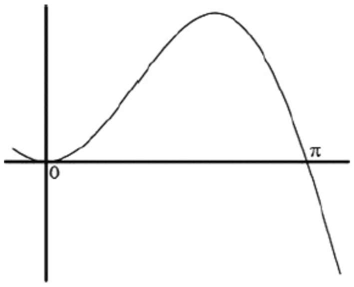
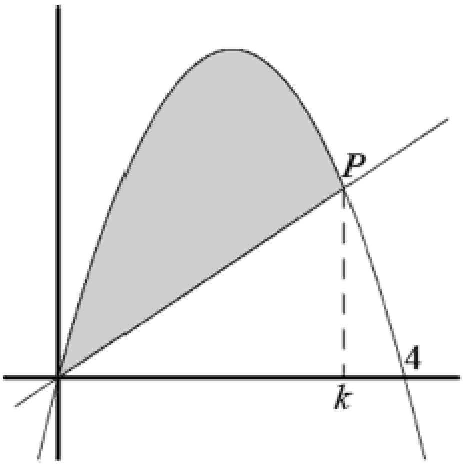
1. [PAU10J1Q5] La gràfica de la funció $f(x) = x \cdot \sin x$ és la següent:



a) Trobeu-ne una primitiva.
b) Aplicant el resultat de l'apartat anterior, calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses des de x=0 fins a $x = \pi$.

2. [PAU10J5Q6] En la figura es mostra la corba $y = x(4 - x)$ i una recta r que passa per l'origen i talla la corba per un punt P d'abscissa k, amb $0 < k < 4$.



a) Trobeu l'àrea ombrejada, delimitada per la corba i la recta, en funció de k.
b) Trobeu per quin valor de k l'àrea de la regió ombrejada és la meitat de l'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix OX.

3. [PAU10S2Q5] Sigui $f(x) = \frac{8x^2}{2x+1}$. Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix OX i les rectes $x = 0 \; i \; x = 2$.

4. [PAU11J1Q3] Definim les funcions $f(x) = a(1 - x^2) i \; g(x) = \frac{x^2-1}{a}$, en que $a > 0$.

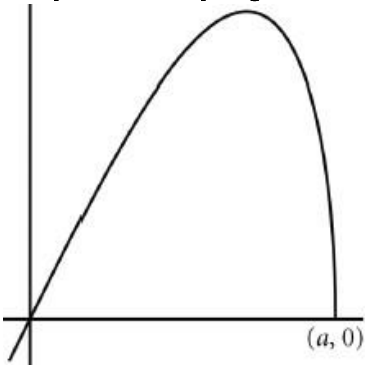
a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és $\frac{4(1+a^2)}{3a}$.
b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè aquesta àrea sigui mínima.

5. [PAU11J4Q1] Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació $f(x) = x^2 - x + 2 \; i \; g(x) = 5 - 3x$.

6. [PAU11S2Q6] Sigui $f(a) = \int_0^{1/a} (a^2 + x^2) dx \; per \; a \; a > 0$.

a) Comproveu que $f(a) = \frac{1}{3a^3} + a$.
b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim relatiu.

7. [PAU12J1Q2] La gràfica de la funció $f(x) = x\sqrt{o - x^2}$ és la següent:



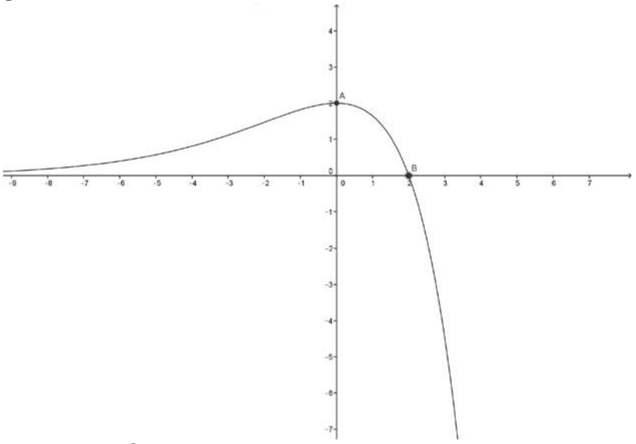
a) Trobeu el punt de tall (a, 0) de la funció amb la part positiva de l'eix OX.
b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica $f(x)$ i l'eix OX en el primer quadrant.

8. [PAU13J4Q2] La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.
a) Calculeu el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k.
b) Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6}u^2$.

9. [PAU13J3Q3] Donada la funció $f(x) = \sqrt{x - 1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0$,
a) Fes un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, ie els eixos de coordenades.
b) Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a 14/3.

10. [PAU14J3Q4] Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques $y = x^2, y = 4x^2$ i $y = 9$.

11. [PAU14J4Q6] Responeu a les qüestions següents:
a) La funció $f(x) = (b - x)e^{ax}$, amb a i b constants, té la representació gràfica següent i sabem que passa pels punts A(0, 2) i B(2, 0), i que en el punt A la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de a i b.



b) Calculeu $\int_1^2 xlnxdx$.

12. [PAU15J2Q3] Responeu les qüestions següents:
a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.
b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per al corba $y = x^3$ i la recta $y = 3x - 2$.

13. [PAU16J3Q6] Siguin les paràboles $f(x) = x^2 + k^2$ i $g(x) = -x^2 + 9k^2$.
a) Calculeu les abscisses, en funció de k, dels punts d'intersecció de les dues paràboles.

b) Calculeu els valors del paràmetre k perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui 576 unitats quadrades.

14. [PAU16J5Q6] Sabem que una funció $f(x)$ té per derivada $f'(x) = (x+1)e^x$ i que $f(0) = 2$.
a) Trobeu l'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt de la corda d'abscissa $x = 0$.
b) Calculeu l'expressió de $f(x)$.

15. [PAU16S1Q4] Sigui la funció $f(x) = \sin x$
a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció $f(x)$ en els punts d'abscissa $x = 0 \; i \; x = \pi$, respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.
b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció $f(x)$ i les rectes tangents de l'apartat anterior (en cas de no haver resolt l'apartat anterior, suposeu que les rectes són $y = x \; i \; y = -x - \pi$, respectivament.

16. [PAU17J5Q3] Responeu a les qüestions següents.
a) Comproveu que la recta tangent a la corba $y = x^2$ en el punt d'abscissa $x = 2$ és la recta $y = 4x - 4$ i calculeu els punts d'intersecció d'aquesta recta amb els eixos de coordenades.
b) Calculeu l'àrea limitada per al corba de l'apartat anterior, la recta tangent en $x = 2$ i l'eix d'abscisses.

17. [PAU17S2Q4] De les funcions $f(x), f'(x), g(x) i \; g'(x)$, en coneixem els valors següents:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	–6

x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1
1	3	3

a) De la funció $f(x)$ sabem també el pendent de la recta tangent a un punt d'abscisssa x és $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Trobeu $f(x)$.
b) Calculeu $(g \circ f)'(1)$.

18. [PAU17S2Q6] Sigui la funció $f(x) = \frac{sinx}{\cos^2 x}$
a) Calculeu la primitiva de la funció $f(x)$.
b) Calculeu l'àrea limitada per la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses entre les abscisses $x = 0 \; i \; x = \frac{\pi}{4}$.

19. [PAU18J1Q5] Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$
a) Comproveu que la funció $f(x)$ compleix el teorema de Bolzano a l'interval $[0, 2]$ i que, per tant, l'equació $f(x) = 0$ té alguna solució a l'interval (0, 2). Comproveu que $x = 1$ és una solució de l'equació $f(x) = 0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.
b) A partir del resultat final de l'apartat anterior, trobeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0 \; i \; x = 1$.

20. [PAU18J5Q4] Sabem que una funció $f(x)$ està definida per a tots els nombres reals i que ñes derivable dues vegades. Sabem també que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 2$, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de al funció $f(x)$ en aquest punt és $y = -124x + 249$ i que $f(-3) = -4$.
a) Calculeu $f''(2), f'(2) i \; f(2)$.

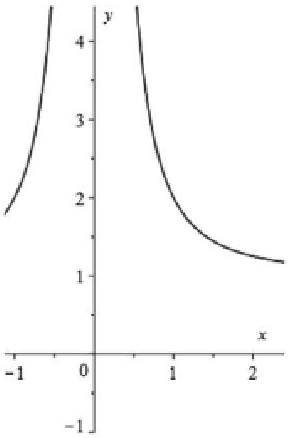
b) Calculeu $\int_{-3}^{2} f'(x)dx$

21. [PAU18S3Q6] Siguin les funcions $f(x) = x^2 - 1\ i\ g(x) = 3 - x^2$

a) Feu un esbós de les gràfiques de les paràboles $y = f(x) i\ y = g(x)$ en un mateix sistema d'eixos cartesians i trobeu els unts de tall amb l'eix de les abscisses, els vèrtex i els punts de tall entre les dues gràfiques.

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada pel semiplà $y \geq 0$ compresa entre les gràfiques $f(x)\ i\ g(x)$.

22. [PAU20J1Q1] Tracem la recta tangent a la funció. $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ per un punt $P = (a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta untament amb els eixos de coordenades formen un triangle.



a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a, ve donada per la funció:

$$g(a) = \frac{(a^2 + 3)^2}{4a}$$

b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

23. [PAU20J1Q6] Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.

b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.

24. [PAU20J3Q4] Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en què ln indica el logaritme neperià, definida per a $x > 0$.

a) Calcula les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.

b) Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y = f(x)$, les rectes verticals $x = 1$ i $x = e$ i l'eix d'abscisses.

25. [PAU20S4Q1] Siguin les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = a \cdot x^2$, en què a és un nombre real positiu.

a) Trobeu, en funció del paràmetre a, els punt de tall entre les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i feu un esbós de la regió limitada per les dues gràfiques.

b) Calculeu el valor de a perquè l'àrea compresa entre $y = f(x)$ i $y = g(x)$ sigui $\frac{27}{4}u^2$.

26. [PAU21J2Q4] Sigui la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x > 0$, en què ln és el logaritme neperià.

   a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y = f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.

   b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal.

c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y = f(x)$ i les rectes $x = 1$ i $x = e$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0 < x < 5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.

27. [PAU21JS5Q2] Siguin les funcions $f(x)=x^3-9x$ i $g(x)=7x$.
    a. Estudieu els intervals de creixement i decreixement de f(x).
    b. Calculeu l'àrea de la regió del semiplà $x\geq 0$ compresa entre les gràfiques de f(x) i g(x).
28. [PAU21SS1Q2] a. Donada la funció , calculeu l'equació de la recta tangent a y=f(x) en el punt d'abscissa x=1. Trobeu també l'equació de la recta normal a y=f(x) en aquest mateix punt.
    b. Feu un esbós de les gràfiques de la corba y=f(x) i de la recta 4x+y=8, i calculeu l'àrea delimitada per aquestes dues gràfiques, l'eix de les abscisses i la recta vertical x=3.

29. [PAU22JS2Q1]Sigui $f'(x)=3x^2-12x$ la derivada d'una funció f(x).
    a. Si sabem que f(x) talla l'eix de les abscisses en x=1, calculeu l'expressió de la funció f(x).
    b. Calculeu l'abscissa del punt d'inflexió de f(x) i estudieu la concavitat de la funció.[0,75 punts]
    c. Sabem que l'àrea del recinte limitat per la corba y=f''(x), l'eix de les abscisses i les rectes x= 0 i x=a, amb a > 2, és $15u^2$. Calculeu el valor de a.

30. [PAU22JS2Q4]
    a. Trobeu una funció polinòmica y=g(x) de grau 3 tal que talli l'eix de les ordenades en el punt (0, 5), que la recta tangent a y=g(x) en el punt d'abscissa x= 1 sigui horitzontal i que g''(x) = 2x + 1.
    b. Comproveu que la funció $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ té una arrel a x= 2 i que és estrictament creixent a l'interval (0, 4). Utilitzeu aquesta informació per a calcular l'àrea determinada per la funció f(x), l'eix de les abscisses i les rectes x= 0 i x= 4.

31. [PAU22JS5Q2] Considereu la funció $f(x)=x^3$ i sigui a un nombre real estrictament positiu.
    a. Calculeu l'equació de la recta t tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa x=a. Trobeu el punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses (en funció de a).
    b. Feu un esbós de la gràfica de la funció f i la recta t. Calculeu el valor de a perquè l'àrea en el primer quadrant limitada per la funció f, la recta t i l'eix de les abscisses sigui 108 u^2.

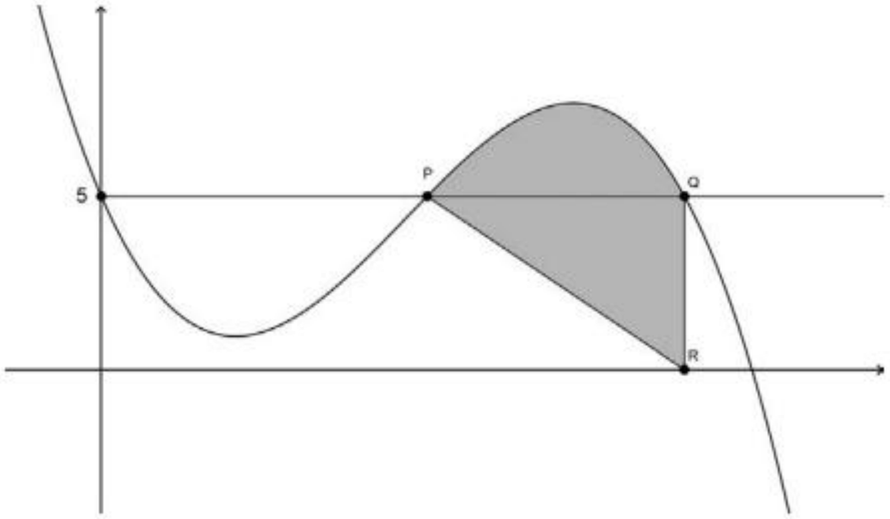
32. [PAU22S3Q4]
    a. Considereu la funció $f(x) = \begin{cases} \ln(x), si\ x \in (0, e), \\ ax + b, si\ x \in [e, 4) \end{cases}$ on a i b són nombres reals. Trobeu el valor de a i de b per tal que la funció sigui contínua i derivable a l'interval (0, 4)
    b. Calculeu la funció g(x) que satisfà $g'(x) = \frac{x^3}{9x^4+1}$ i que passa pel punt (0, –1)

33. [JUNY23S1Q3] Sigui $f'(x) = \begin{cases} x-1, & si\, x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1}, & si\, x > 2 \end{cases}$ la funció derivada d'una funció derivable f(x) que passa pel punt A = (0, 3).
    a. Calculeu la funció f(x).
    b. Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció f'(x) en el punt d'abscissa x= 3.

34. [JUNY23S5Q1] Considereu les funcions $f(x) = -x^2 + x + 6$ i $g(x) = -9x + 3x^2$.
    a. Calculeu l'àrea de la regió delimitada per les dues funcions.
    b. Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció f(x) en el punt (–2, 0). Representeu aquesta recta tangent i les funcions f(x) i g(x) en uns mateixos eixos de coordenades.

35. [SET23S1Q4] Sigui la funció f(x) definida per $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$
    a. Justifiqueu que f(x) = 2 té una solució en l'interval (–1, 0)
    b. Sigui la funció $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calculeu l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques de les funcions f(x) i h(x).

36. [JUNY24J1Q3] En Joan troba entre els papers del seu avi un esbós com el de la figura adjunta, on es descriu un terreny de regadiu que ha deixat en herència al seu pare.

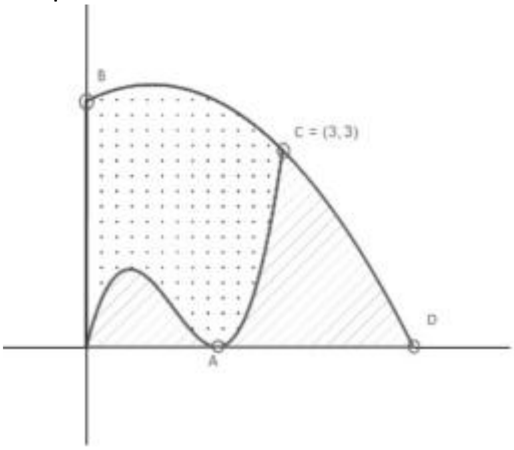


La corba de la gràfica és y = f(x), amb $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

a. A partir de l'expressió de f(x), calculeu les coordenades dels punts P, Q i R indicats a la figura. Calculeu també l'equació de la recta PR.
b. Calculeu la superfície del terreny.

47. [PAU 24J5Q3] Considereu les paràboles $y = f_a(x)$, amb $f_a(x)= ax^2+2x+5- a$, on a és un paràmetre real.
    a. Determineu el valor del paràmetre a per al qual la recta tangent a $y = f_a(x)$ en el punt d'abscissa x = 1 passa pel punt (2, 13).
    b. Calculeu els punts de tall de les paràboles $y = f_1(x)$ i $y = f_3(x)$.
    c. Calculeu l'àrea de la regió situada entre les dues paràboles $y= f_1(x)$ i $y= f_3(x)$.

48. [PAU 24S3Q3]La classe de l'Èlia ha dissenyat el logotip següent per a pintar-lo a la paret de l' institut.



La corba que passa pel punt A és y = f(x), amb f(x) = $x^3 - 4x^2 + 4x$, i la que passa pels punts B, C = (3, 3) i D és y = g(x), amb $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$

a. Calculeu les coordenades dels punts A, B i D.
b. Calculeu l'àrea de la zona puntejada.
c. Els alumnes volen pintar la part puntejada de color blau i la part ratllada de color vermell. Sabent que l'àrea total del logotip $\frac{175}{12}$ és m^2, de quin color necessitaran més pintura?